ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 SEPTEMBRE 1928.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE ROUX.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

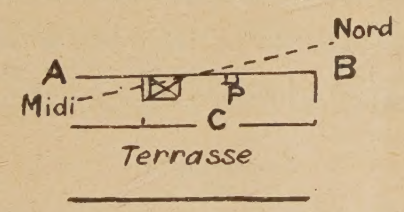
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *L'observatoire de Delambre à Bruyères* (*Seine-et-Oise*). Note (¹) de M. G. BIGOURDAN.

On a vu (p. 439) que Delambre a également fait quelques observations astronomiques à Bruyères, où il avait pu établir un petit observatoire dans la maison de Mme Lelong. Ses registres (voir p. 401-402) donnent quelques détails sur cet observatoire où il fit (ou dans les environs) les séjours suivants, outre ceux déjà indiqués, et tous assez courts :

1790 Mai 22–Juin	11 (II, 240-241)		1791 Oct. 13-Nov.	22 (III, 235)
1791 Mars 14- ?	(III, 125)		1792 Mai 26–Mai	30 (III, 383)
» Juin 11-Juillet	6 (III, 179)		1795 Avril 17-Mai	30? (III, 419)

Observations. — A la date du 4 juin 1787 (p. 64) il donne de son observatoire un dessin assez grossier que reproduit la figure et qu'il accompagne de ces indications :



La ligne ponctuée est la méridienne à peu près. AB le mur du fond de ma chambre, contre lequel est la pendule P ; et C est la porte qui donne sur la terrasse sur laquelle

(¹) Séance du 20 août 1928.

on descend par trois degrés. Au-dessus de la chambre il n'y a qu'un toit peu élevé et je puis observer jusqu'à 70° de distance zénithale.

Observations. — Les séjours que Delambre faisait à Bruyères étaient parfois bien courts et ne se prêtaient guère à des observations suivies, pour lesquelles il paraît d'ailleurs avoir manqué d'instruments appropriés : le meilleur de son temps était consacré à la détermination de l'heure par des hauteurs correspondantes; aussi n'a-t-il obtenu là qu'un petit nombre de résultats utiles : éclipses de satellites de Jupiter et occultations d'étoiles par la Lune. Il n'est d'ailleurs pas certain que nous ayons tous les registres des observations faites à Bruyères.

Il y avait aussi construit un cadran solaire dont il parle ainsi à la date du 4 novembre 1787 :

J'ai profité du beau tems de ce matin pour vérifier le cadran solaire que j'avois construit de cette manière.

Au solstice d'été 1786 j'avois marqué les points horaires de quart d'heure en quart d'heure depuis $10^h.43'$ jusqu'à $1^h.30'$. Cet automne en trois jours différens j'ai marqué les points horaires correspondans que j'ai fait joindre aux premiers par des lignes droites prolongées par le haut. Vers le point solsticial d'hiver j'ai fait mener une ligne parallèle à l'horizon et mesurer les intervalles des lignes horaires sur cette ligne; j'ai observé le matin le passage du Soleil par toutes les lignes horaires : elles se sont trouvées avancer de quelques secondes; une minute vaut depuis $1^{ll},33$ jusqu'à $1^{ll},5$ sur l'horizontale dont j'ai parlé; il a donc été facile de calculer de combien il falloit avancer les lignes horaires vers la droite c'est-à-dire vers l'orient. J'ai fait mettre à tous les points corrigés de petits clous de cuivre comme j'avois fait au solstice d'hiver et j'attens le peintre pour tracer les lignes véritables.

Ce cadran, s'il est bien tracé par le peintre, donnera l'heure à cinq secondes près en tous tems...

L'année suivante en mai il compare (p. 148-149) les indications de ce cadran solaire à celles de sa pendule, préalablement réglée, et conclut ainsi :

Le cadran suffit donc pour régler une pendule à deux ou trois secondes près.

Peu après il vérifie sur le clocher d'Egli son quart de cercle par renversement.

Coordonnées.

Dans le tome I de la *Base du Système métrique*, p. 147, Delambre dit :

J'ai fait cette station pour joindre aux triangles de la méridienne une maison [celle de Mme Lelong, porte du perron qui descend dans le jardin] dans laquelle j'ai fait plusieurs observations astronomiques, et où, depuis, j'ai fait construire un petit observatoire.

Pour ce rattachement il avait mesuré (*Base* I_2 139, 147, 150, 524) les trois angles du triangle *Bruyères-Malvoisine-Torfou* et il avait déterminé diverses distances zénithales pour conclure les altitudes (I_2 137, 149; II, 723) : celle-ci pour Bruyères est de 52 toises ($101^m,4$). Pour les distances de Bruyères à la méridienne et à la perpendiculaire de Dunkerque il donne $6849^T,3$ et $13.782^T,11$.

Mais il faut ramener ces nombres à la méridienne et à la perpendiculaire de l'Observatoire :

Longitude. — Bruyères est (*Base* III, 226) $6849^T,0$ à l'*ouest* et la pyramide Montmartre (qui est la méridienne de l'Observatoire) $1493^T,0$ à l'*est*. Au total Bruyères est donc $8342^T,0$ à l'ouest de notre méridien fondamental.

Latitude. — Les nombres de Delambre placent Bruyères à $14.343^T,1$ au *sud* du Panthéon qui, lui-même, est $560^T,99$ au *nord* de l'Observatoire. On a donc finalement :

Dist. à la mérid. de l'Obs^{re} $= 8.342^T,0 = 16.248^m,9$ O ou $\Delta\mathcal{L} = 13'.15'',5 = 0^m.53^s,04$
» perpend. » $= 13.782^T,11 = 26.861^m,2$ S ou $\Delta\varphi = 14'.30'',0$.
Ainsi : Longitude ouest $= \mathbf{0^h.0^m.53^s,04}$ Latitude nord $= \mathbf{48^o.35'.11'',0}$.

CORRESPONDANCE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur des algorithmes caractéristiques de probabilité*. Note de M. **Constant Lurquin**, transmise par M. Émile Borel.

1. Les concepts classiques de valeur moyenne et d'écart moyen pour une ou plusieurs variables éventuelles ont acquis une importance essentielle dans les théories modernes de probabilités.

La présente Note fait connaître des résultats relatifs à l'analyse statistique de ces deux algorithmes probabilitaires.

2. La valeur moyenne absolue V.M d'une variable éventuelle α est définie par la relation

$$\text{(1)} \qquad \text{V.M}(\alpha) = \sum_{i}^{\mu} {}_{1}\, \varphi(\alpha_i)\alpha_i,$$

$\varphi(\alpha)$ est une fonction donnée qui caractérise le schéma de probabilité.

La généralité de la forme canonique (1) peut être restreinte de différentes façons; les deux principales se rapportent à la loi binomiale ordinaire de probabilité et au schéma de Poisson.

La valeur moyenne d'une variable éventuelle est un algorithme stable pour cette quantité variable. Si α, β sont des variables indépendantes, on a

$$\text{(2)} \qquad \text{V.M}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{V.M}(\alpha)\,\text{V.M}\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

La loi de composition la plus générale pour les valeurs moyennes est donnée par le développement symbolique

$$\text{(3)} \qquad \text{V.M}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)^n = [\text{V.M}(\alpha)+\text{V.M}(\beta)+\text{V.M}(\gamma)+\ldots]^n.$$

Le concept de fonction génératrice de fréquence conduit à une théorie élégante des valeurs moyennes.

Le calcul des valeurs moyennes dans le cas du schéma de Bernoulli pour une puissance quelconque de la variable donne la formule

$$\text{V.M}(\alpha^n) = \sum_{1}^{\mu} {}_i\, N_i^n A_i^\mu p^i$$

avec

$$N_1^n = N_n^n = 1, \qquad N_i^n = i N_i^{n-1} + N_{i-1}^{n-1}, \qquad A_i^\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1).$$

3. L'écart absolu x est une variable éventuelle dont la valeur moyenne est nulle.

On a

$$x_i = \alpha_i - \text{V.M}(\alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

L'écart moyen de degré n de α est la valeur moyenne de la puissance n de l'écart x. En particulier, l'écart moyen quadratique $\underset{(2)}{\text{E}}(\alpha)$ vaut

$$\underset{(2)}{\text{E}}^2(\alpha) = \text{V.M}(x^2) = \text{V.M}(\alpha^2) - [\text{V.M}(\alpha)]^2.$$

Il existe pour cette fonction de probabilité une propriété simple d'invariance donnée par la relation

$$\underset{(2)}{\text{E}}^2(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = \underset{(2)}{\text{E}}^2(\alpha) + \underset{(2)}{\text{E}}^2(\beta) + \underset{(2)}{\text{E}}^2(\gamma) + \ldots.$$

Les fonctions génératrices de fréquence permettent d'établir rapidement ce résultat.

La relation (3) admet l'extension suivante :

$$\underset{(n)}{\text{E}}^n(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) = \sum \frac{n!}{a!\,b!\,c!}[\text{E}(\alpha)]^a[\text{E}(\beta)]^b[\text{E}(\gamma)]^c\ldots$$
$$(a+b+c+\ldots = n).$$

Dans un autre Recueil nous avons fait connaître différentes méthodes générales de calcul des écarts moyens de probabilité et en particulier leurs valeurs concrètes pour le schéma de Bernoulli.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions entières à série lacunaire.* Note de M. **Miécislas Biernacki.**

M. G. Pólya a montré [1] que si la fonction entière

(1) $$a_0 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k} + \ldots,$$

où $\lim\limits_{k=\infty} \frac{k}{n_k} = 0$ est d'ordre infini, toute demi-droite issue de l'origine est « à la Julia ». Je vais établir un théorème analogue :

Si $\varliminf\limits_{k=\infty} \frac{\log(n_{k+1} - n_k)}{\log n_{k+1}} > \frac{1}{2}$, *toute demi-droite issue de l'origine est de Julia pour la fonction entière* (1) [2].

Je poserai $|z| = r$; $n(r)$ sera le rang du terme de module maximum de la série (1), $m(r)$ son module, $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$, $A(r)$ celui de $\mathcal{R}[f(z)]$ [partie réelle de $f(z)$] pour $|z| = r$; je suppose que pour $\rho'_k \leq r < \rho'_{k+1}$, $n(r) = n'_k$. D'après une proposition connue [3] et la condition de l'énoncé, on a, pour toute valeur « ordinaire » de r,

(2) $$f(z) = a_n z^n [1 + \varepsilon_n(z)],$$

où $n = n(r)$ et $\varepsilon_n(z) \to 0$ avec $\frac{1}{n}$. Si r parcourt les valeurs qui ne sont pas ordinaires, $\log r$ varie dans (r_0, ∞) d'une quantité ∞ petite avec $\frac{1}{r_0}$ et dans (r', r''), r' et r'' étant des valeurs ordinaires, de

(3) $$[n(r'') - n(r')][n(r')]^{\alpha - 2} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

au plus.

Lemme. — *Soient* Δ' *un domaine fermé,* Δ *un domaine fermé complètement intérieur à* Δ, $\varphi(z)$ *une fonction holomorphe dans* Δ', A' *et* A *les maxima de* $\mathcal{R}[\varphi(z)]$ *dans* Δ' *et* Δ *respectivement. Le rapport* $|\varphi'(z)| : (A' - A)$ *ne dépasse pas, dans* Δ, *un nombre qui ne dépend que de* Δ *et de* Δ'.

---

(1) *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1526, Théorème II.

(2) Je n'ai établi primitivement cette proposition que sous la condition $\varliminf\limits_{k=\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1$. M. Pólya m'a fait remarquer que la démonstration doit pouvoir s'étendre au cas envisagé dans le texte.

(3) A. Wiman, *Acta math.*, 41, 1918, p. 8. — G. Valiron, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, 37, 1920, p. 237, Théorème VII. Cf. aussi W. Saxer, *Math. Zeitschr.*, 17, 1923, p. 206-227.

En effet, si z_0 est un point de Δ où $\mathcal{R}[\varphi(z_0)] = A$, la famille

$$h(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{A' - A}$$

est normale et bornée; on peut aussi utiliser l'inégalité connue

$$(R - r)M(r) \leqq 2r A(R)$$

$[f(z)$ holomorphe dans $|z| \leqq R$, $f(0) = 0$, $0 < r < R]$, en effectuant une transformation conforme.

Si $\varliminf_{k=\infty} \frac{\rho'_{k+1}}{\rho'_k} > 1$, considérons la famille $f_k(z) = f(\rho'_k z)$ dans le secteur S : $|\arg r'| < \frac{\theta}{2} q^{-4} < |z| < q^4 (q > 1)$; supposons que les $f_k(z)$ ne s'y annulent pas. En appliquant le lemme aux fonctions $\log f_k(z)$, en utilisant (2) et la formule $\log m(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$, on trouve(¹) que dans le secteur Δ : $|\arg z| \leqq \frac{\theta}{8}$, $q^{-2} \leqq |z| \leqq q^2$,

$$\left| \frac{f'_k(z)}{f_k(z)} \right| = O(n'_k). \tag{4}$$

Considérons les secteurs $\mathcal{R}_k$: $|\arg r| \leqq \frac{\theta}{8}$, $r'_k \leqq |z| \leqq r''_k$, où r'_k est la plus grande valeur ordinaire $< \rho'_k$ et r''_k la plus petite valeur ordinaire $> \rho'_k$. Évaluons $\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ prise le long des contours des $\mathcal{R}_k$. Les arcs de cercles fournissent, d'après (2), une contribution de l'ordre de $[n(r''_k) - n(r'_k)]$. Les segments de droites limitant les $\mathcal{R}_k$ fournissent, d'après (4), une contribution ∞ petite par rapport à $n(r''_k)$. Si $\frac{n(r''_k)}{n(r'_k)} \to 1$ lorsque $k \to \infty$, on utilise (3).

Si $\varliminf_{k=\infty} \frac{\rho'_{k+1}}{\rho'_k} = 1$ et $f(z)$ est de l'ordre fini, il existe une suite $\{r_k\}$, $\lim_{k=\infty} r_k = \infty$ telle que $\lim_{k=\infty} \frac{n(q^4 r_k)}{n(q^{-2} r_k)} < +\infty$. On étudie la famille $f(r_k z)$ dans le secteur S et l'on considère les secteurs $\mathcal{R}_k$ du cas précédent : au lieu de ρ'_k intervient une valeur ρ'_s telle que $r_k \leqq \rho'_s \leqq q r_k$. La démonstration s'achève comme plus haut.

Si $f(z)$ est de l'ordre infini, le théorème n'est qu'un cas particulier de

(¹) En supposant que k parcourt une suite des valeurs par laquelle $\lim_{k=\infty} \frac{\rho'_{k+1}}{\rho'_k} = 1$.

celui de M. Pólya; il résulte d'ailleurs facilement de (2) et d'un théorème de M. Mandelbrojt [1].

Remarques. — I. Si $f(z)$ est de l'ordre fini elle prend, dans les secteurs transformés de S par $z|\rho'_k z$ ou $z|r_k z$, *toute* valeur un nombre de fois qui $\rightarrow\infty$ avec k.

II. Une étude algébrique fort simple [2] montre que, dans un angle quelconque d'ouverture θ, les polynomes-sections $a_0 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_k x^{n_k}$ prennent toute valeur $n_k \frac{\theta}{2\pi}(1+\varepsilon_k)$ fois, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ avec $\frac{1}{k}$, et ceci *sous la seule condition* $\lim\limits_{k=\infty} \frac{k}{n_k} = 0$.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur la détermination géométrique des lignes d'influence des efforts dans les poutres continues de forme quelconque.* Note [3] de M. **Farid Boulad Bey**, transmise par M. d'Ocagne.

A notre connaissance on n'a pas encore donné un procédé pratique de construction graphique des lignes d'influence des efforts dans les éléments des travées intermédiaires d'une poutre continue de forme quelconque en tenant compte des dimensions de ses divers éléments. Les méthodes employées exigent des calculs et des tracés assez laborieux.

Comme les cahiers des charges des ponts métalliques dans quelques pays prescrivent la présentation des calculs de ces ponts par la méthode des lignes d'influence, en raison de l'avantage qu'offrent ces lignes de permettre un calcul rapide et exact de la stabilité de ces ouvrages, nous croyons utile de présenter ici un nouveau théorème sur la détermination géométrique de ces lignes d'influence dans les deux cas d'une poutre continue à quatre et cinq appuis simples.

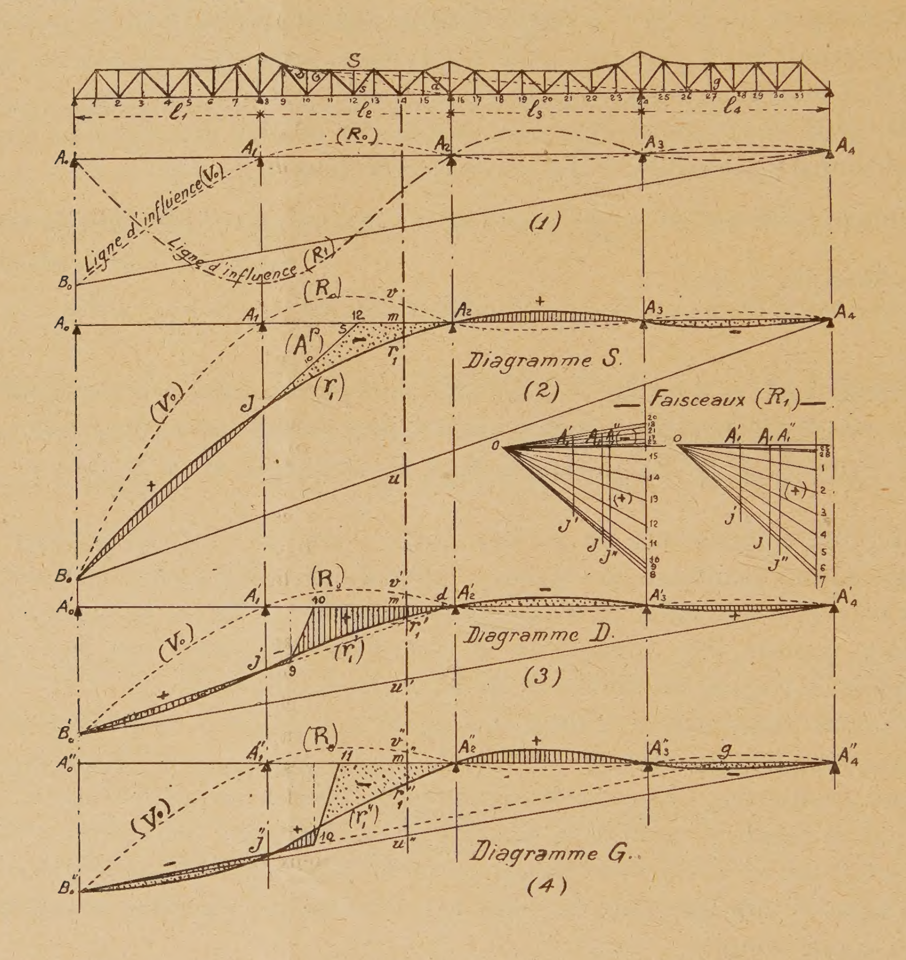
Ce théorème ramène la détermination de la ligne d'influence (S) des efforts dans un élément quelconque S (*fig.* 1) d'une travée intermédiaire A_1A_2 d'une poutre continue à cinq appuis A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, au cas où cette poutre serait supposée reposant seulement sur ses deux appuis

(1) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1098, théorème I. Une démonstration analogue permet de retrouver le théorème I de la Note citée de M. Pólya.

(2) Cf. pour la méthode suivie mon travail *Sur les équations algébriques*, etc. (*Bulletin de l'Acad. polonaise des Sciences*, *Classe des sciences mathém. et natur.*, série A, 1927, p. 587-594).

(3) Séance du 3 septembre 1928.

extrêmes. Nous donnerons également ici un résumé de l'application de ce théorème aux trois éléments : la membrure S et les deux diagonales D et G.



En effet, soient (R_0) et (R_1) [diag. (1)] les deux lignes d'influence respectives des réactions des deux appuis A_0 et A_1, supposées déterminées, A_0B_0 [diag. (2)] l'ordonnée en A_0 de la ligne (R_0) ou (V_0) et J le point de rencontre de la verticale de l'appui A_1 avec la droite B_0s joignant le point B_0 au point de projection s du nœud opposé à l'élément S sur la droite A_0A_4.

Voici l'énoncé de ce théorème : *Les ordonnées de la ligne d'influence* (S) *sont représentées par les segments verticaux intérieurs aux zones hachurées et pointillées comprises entre les deux lignes suivantes :* 1° *la ligne d'influence* (A_0^p) *des efforts dus à une charge isolée* $P = 1$ *dans cette poutre supposée à*

une seule travée A_0A_4, *rapportée à la droite* B_0A_4; 2° *la ligne d'influence* (r_1) *des réactions de l'appui* A_1 *à ordonnées comptées à partir de la ligne* (R_0) *ou* (V_0) *et réduites de manière que cette ligne* (r_1) *ou* $B_0JA_2A_3A_4$ *passe par le point* J.

Propriété importante de la ligne (R_0) relative à ce théorème: *Quel que soit le nombre de travées d'une poutre continue* A_0A_n, *si la ligne* (R_0) *ou* $B_0A_1A_2\ldots A_n$ [diag. (1)] *était rapportée à la droite* B_0A_n, *elle représenterait également la ligne d'influence* (V_0) *de la réaction en* A_0, *due aux seules réactions de tous les appuis intermédiaires dans cette poutre supposée à une seule travée* A_0A_n.

Dans la figure ci-contre les trois diagrammes (2), (3) et (4) représentent l'application de ce théorème aux trois élémeuts S, D, G ayant pour sommets opposés correspondants *s*, *d*, *g*.

Les lignes d'influence précitées (A_0'') correspondant à ces trois éléments sont représentées par les trois polygones $B_0sA_4B_0$, $B_0'.9.10.A_4'B_0'$ et $B_0''.10.11.A_4''B_0''$ construits par la méthode habituelle. Les lignes d'influence (r_1), (r_1') et (r_1'') correspondant à ces mêmes éléments passent respectivement par les trois points de rencontre J, J', J'' de la verticale de A_1 avec les trois droites B_0s, $B_0'd$, $B_0''g$ et ont été tracées en se servant du faisceau (R_1) de réduction des ordonnées de la ligne d'influence (R_1) au droit des nœuds 1, 2, 3, 4, ..., de cette poutre triangulée.

Les lignes d'influence des efforts représentés ainsi par les segments ci-dessus, sont dites à ordonnées *réduites*. Pour avoir l'effort réel dans un élément S dû à une charge quelconque dans cette poutre, il suffit de déterminer l'effort f_0 dans cet élément dû à une réaction $R_0 = 1$ agissant en A_0 dans cette poutre supposée en porte à faux de A à A_0, ensuite d'adopter A_0B_0 comme unité des ordonnées réduites de la ligne (S) et de multiplier par f_0 l'effort donné par la lecture de ces ordonnées *réduites*.

Dans une Note, actuellement sous presse, nous donnerons la démonstration de notre théorème ainsi que le détail de ses applications aux deux cas d'une poutre à quatre et cinq appuis.

PHYSIOLOGIE. — *Sur le rapport de la fécondité et de la haute fréquence dans les postes d'émission de télégraphie sans fil.* Note [1] de MM. **Nemours-Auguste** et **Martin**, transmise par M. d'Arsonval.

Désirant nous rendre compte de la valeur de certains bruits courant sur la stérilité produite chez les manipulateurs des postes d'émission de télégraphie sans fil, et quoique cette action des courants de haute fréquence ne réponde à aucune loi électrophysiologique, nous avons fait l'expérience

(1) Séance du 27 août 1928.

suivante : Nous avons placé deux lots de souris, un mâle, l'autre femelle à 2^m et pendant 15 jours et 15 nuits, d'un solénoïde de la Tour Eiffel, dont les caractéristiques étaient les suivantes :

1° Longueur totale du solénoïde...........	$1^m,50$
2° Longueur de la partie utilisée..........	$0^m,93$
3° Nombre total de spires..................	48
4° Nombre total de spires utilisées........	30
5° Pas de l'enroulement..................	$0^m,031$
6° Diamètre du solénoïde..................	$1^m,75$
7° Intensité du courant....................	60 amp. env.
8° Longueur d'onde des émissions.........	7200^m

Au bout de ce laps de temps, nous avons réuni les mâles et les femelles. 45 jours après les femelles donnaient des petits.

Nous faisons remarquer que les manipulateurs ne demeurent jamais à demeure dans les conditions de notre expérience.

Avec les postes à éclateur, le bruit répété produisait des phénomènes d'asthénie qui ne sont pas observés à l'heure actuelle.

Nous pensons que dans les conditions de notre expérience la haute fréquence ne détermine pas la stérilité.

ÉLECTROPHYSIOLOGIE. — *Théorie cinétique de l'excitation neuro-musculaire par ondes brèves*. Note (¹) de M. **Philippe Fabre**, transmise par M. d'Arsonval.

Le premier stade de l'excitation électrique d'un tissu consiste en une charge ionique des surfaces internes qui s'établit en un temps négligeable lors de l'admission d'un courant constant.

Les ions minéraux B ainsi accumulés doivent s'unir aux ions colloïdaux A du protoplasme avec une vitesse qui caractérise le tissu excité. Cet échange de charges électriques entre ions ne modifie pas la quantité totale d'électricité au niveau de la surface, qui reste constante jusqu'à l'ouverture du courant.

On retrouve la forme des résultats expérimentaux relatifs à l'excitabilité par ondes rectangulaires en posant que la réaction est d'ordre supérieur au

(¹) Séance du 27 août 1928.

premier ($n > 1$) par rapport aux ions B,

$$A + nB \rightleftharpoons C$$

et en admettant qu'une certaine quantité a d'ions B doit être entrée en réaction par unité de volume protoplasmique actif pour que le seuil de l'excitation soit atteint.

La vitesse de la réaction est d'après la loi d'action de masse

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = K\left(M - \frac{x}{n}\right)(mi - x)^n - H\frac{x}{n};$$

$m \times i$, nombre d'ions B accumulés au début, par unité de volume actif, au voisinage de la surface, sous l'effet du courant d'intensité i;
x, nombre de ces ions ayant réagi au temps t;
M, nombre d'ions A au début, dans l'unité de volume actif;
K, vitesse de la réaction directe;
H, vitesse de dissociation.

Nous poserons l'ordre $n = 2$; pour un ordre n plus élevé la forme des résultats eût été la même, mais ce choix nous est imposé pour satisfaire à la loi de l'énergie pour les passages très brefs.

Remplaçons en première approximation $\left(M - \frac{x}{2}\right)$ par M, le nombre d'ions protoplasmiques transformés étant petit vis-à-vis de leur nombre total. Négligeons aussi la désintégration de vitesse H faible, il vient

$$(2). \qquad t = \frac{1}{KM}\int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{(mi - x)^2} = \frac{1}{KM}\left[\frac{1}{mi - a} - \frac{1}{mi}\right].$$

Pour les valeurs de l'intensité voisines de la rhéobase, $mi - a$ est faible; son inverse, le premier terme, est donc prépondérant vis-à-vis du deuxième qui peut être négligé. Le temps et l'intensité liminaires sont alors liés par une formule qui correspond à la loi hyperbolique de Weiss

$$t = \frac{\alpha}{i - \beta}.$$

La chronaxie, $T = \frac{\alpha}{\beta}$, a donc pour expression théorique

$$T = \frac{1}{KaM}.$$

On voit qu'elle est inversement proportionnelle à la vitesse de réaction du tissu K, à la richesse M du protoplasme en ions actifs (A), au nombre a

d'ions B par centimètre cube, unis lors de l'excitation liminaire. Les nombres a et m doivent dépendre dans une certaine mesure de l'étendue et de l'emplacement des électrodes, M en est indépendant.

Résultat paradoxal : les tissus facilement excitables (a faible) auraient de grandes chronaxies; résultat pourtant en accord avec la D. R. où le seuil galvanique du muscle s'abaisse alors que T s'élève considérablement. Ici la diminution de la vitesse de réaction doit aussi concourir au relèvement de T.

Pour les temps courts le terme soustractif $\frac{1}{m.i}$ n'est plus négligeable; la formule (2) montre que la courbe des quantités $i \times t$ passe par l'origine. Pour les temps extrêmement courts d'ailleurs, la variation du facteur $\left(M - \frac{x}{2}\right)$, négligée jusqu'ici, devient prépondérante par rapport à celle de $mi - x$; en effet à cause de la valeur très grande de i, ce dernier facteur peut être remplacé par $m.i$. On peut donc poser dans cette région :

$$t = \frac{1}{K}\int_0^a \frac{dx}{\left(M - \frac{x}{2}\right) m^2 i^2} = \frac{2}{K\, m^2 i^2} \log \frac{M}{M - \frac{a}{2}},$$

c'est-à-dire, puisque $\frac{a}{M}$ est faible :

$$i^2 \times t = \frac{a}{K\,M\,m^2} = i_0^2 \times T = \text{const.}, \tag{3}$$

où $i_0 = \frac{a}{m} \neq$ rhéobase.

Le facteur de l'énergie électrique est donc constant pour les durées très brèves et cette constante égale la chronaxie si l'on prend la rhéobase pour unité d'intensité.

Dans le cas général on aurait eu :

$$i^n \times t = \text{const.}$$

La chronaxie T donnée par (3) n'est pas exactement celle T′ qu'eût donnée l''ntégration complète de (1) :

$$T' = \frac{2}{K\,a(2M - a)}$$

La comparaison des valeurs expérimentales de T et de T′ pourra fixer l'ordre de grandeur de $\frac{a}{M}$.

Il conviendra de prendre pour T′ quatre fois environ la valeur de la chronaxie usuelle T, car la droite de Weiss est en fait un long segment quasi rectiligne de la courbe théorique approchée :

$$mQ(mQ - at) = at,$$

segment distinct de l'asymptote, comme le montre la construction. Le relèvement de la courbe des Q pour t très grand sera traité avec la théorie des courants progressifs.

HYGIÈNE. — *Les piscines publiques.* Note [1] de MM. **Bordas** et **Neveu**, présentée par M. d'Arsonval.

On a signalé, à plusieurs reprises, tant en France qu'à l'étranger, l'éclosion d'affections contagieuses plus ou moins graves, dont l'origine était due à l'eau des piscines publiques.

L'un de nous [2] a prouvé que les appréhensions du corps médical étaient des plus justifiées et que la balnéation en commun, telle qu'elle est pratiquée en France et à Paris en particulier, devrait être profondément remaniée afin de présenter au public des garanties hygiéniques beaucoup plus sérieuses.

Cette année, du fait des conditions atmosphériques un peu exceptionnelles, il est vrai, nous avons constaté que l'insalubrité de certaines piscines publiques était devenue un véritable danger public.

On connaît ces établissements où des centaines de personnes viennent se baigner dans quelques centaines de mètres cubes d'eau de Seine ou de Marne, lesquelles sont théoriquement renouvelées tous les 8 jours.

Certains de ces établissements reçoivent journellement de 12 à 1400 personnes qui s'ébattent dans 700^{m^3} d'eau.

Il n'existe aucun contrôle contrairement à ce qui se passe dans les établissements similaires à l'étranger.

On peut pénétrer dans nos piscines sans passer obligatoirement par la douche et sans avoir subi le moindre examen médical.

On conçoit, dans ces conditions, que de pareilles piscines deviennent très rapidement un milieu des plus favorables au développement de maladies

(1) Séance du 27 août 1928.

(2) Bordas, *Étude sur les piscines publiques* (*Annales d'hygiène publique industrielle et sociale*, n° 6, 1924, p. 321).

contagieuses (affections gastro-intestinales, conjonctivites plus ou moins graves (trachomes) et inflammations des fosses nasales, de la gorge, etc.

Il est assez difficile de faire comprendre par la simple lecture de bulletins analytiques que l'eau de pareils établissements n'offre plus les caractères de propreté désirables.

Les analyses chimiques et bactériologiques demandent beaucoup de temps et les résultats obtenus ne sont pas toujours compréhensibles pour les non-initiés.

Nous avons songé à obvier à ce grave inconvénient en appliquant à l'eau un procédé que l'un de nous ([1]) avait imaginé pour déterminer les souillures accidentelles contenues dans le lait.

La méthode consiste à filtrer sous pression plusieurs litres (5 litres) de liquide sur des disques de flanelle blanche : toutes les matières en suspension sont retenues à la surface et l'on peut ainsi évaluer la quantité de ces matières étrangères et en faire l'examen microscopique, etc.

On peut donc connaître en quelques minutes le degré de souillure de l'eau et prendre les mesures nécessaires pour faire cesser la pollution : filtration, stérilisation par le chlore, etc.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Sur les propriétés de la toxine streptococcique-scarlatineuse purifiée.* Note ([2]) de MM. **Et. Burnet** et **J. Bance**, présentée par M. Roux.

G. F. et G. H. Dick conçoivent l'étiologie de la scarlatine comme un décalque de l'étiologie de la diphtérie. De l'une à l'autre infection, toxine, antitoxine, anatoxine, traitement et prophylaxie, se correspondent exactement. La réaction de Dick est la réplique de la réaction de Schick.

Cette conception est très discutée. La spécificité du streptocoque scarlatineux est mise en doute, entre autres par Zlatogoroff. D'après de nombreux observateurs, la réalisation de Dick elle-même ne serait ni régulière ni strictement spécifique.

La toxine scarlatineuse est encore mal connue. Rien ne le montre mieux que les essais qu'on a faits sur diverses espèces animales. D'après Sacquépée, Lesbre et Bouet, le cheval neuf donne la réaction de Dick, et les chevaux

---

([1]) Bordas, *Les souillures du lait* (*Comptes rendus*, 169, 1919, p. 1182).

([2]) Séance du 3 septembre 1928.

immunisés par des injections de toxine ne réagissent plus. Nos expériences (¹) nous ont obligés à faire des réserves sur les conclusions de ces auteurs. Tout se passe comme si le cheval, qui est sensible aux protéines les plus diverses, réagissait aux protéines des cultures de streptocoques plutôt qu'à la toxine de Dick.

Une étude précise de la « toxine scarlatineuse » exige une toxine purifiée, dégagée des protéines qui l'accompagnent dans le filtrat et dans les inoculations. Puisque les Dick ont poussé si loin les analogies entre diphtérie et scarlatine, il faut les pousser plus loin encore et mettre en parallèle la toxine diphtérique purifiée et la toxine streptococcique-scarlatineuse purifiée. En un mot, une bonne purification servira de test pour la détermination des propriétés de la toxine.

C'est ce que nous avons cherché, en employant la méthode de purification élaborée par G. Abt (²) pour la toxine diphtérique. Cette méthode a pour principe la propriété que possède la toxine diphtérique d'être absorbée par les précipités de phosphate dicalcique ou tricalcique à l'état naissant. On utilise cette propriété pour la séparer des protéines étrangères au milieu de culture, en remettant le précipité en solution à l'aide du citrate de soude et de l'acide citrique. Nous avons appliqué rigoureusement la technique de Abt, avec opérations aseptiques.

Nous avons provoqué la réaction de Dick, sur le cheval et sur l'homme, avec la toxine purifiée, en employant comme témoins :

1° La toxine originale; 2° la toxine non purifiée, mais dialysée sur collodion pendant 8 heures, puis refiltrée, dans les mêmes conditions que la toxine purifiée. Nous avons employé comparativement, pour la dialyse, du collodion mou (à 2 pour 100) et du collodion dur (à 5 pour 100); 3° la toxine chauffée une heure à 105°.

Les résultats n'ont pas été les mêmes chez l'homme et chez le cheval.

	Cheval.	Homme (enfant).
Toxine originale	+	+
Tox. purifiée, dial. sac mou, refiltrée	très affaiblie	o
Tox. pur., dial. sac dur, et refilt.	très affaiblie	o
Tox. non pur., dial. sac. mou, refilt.	+	+
Tox. non pur., dial. sac dur, refilt.	+	+
Tox. chauffée 1 heure à 105°	+	o

(¹) *Archives de l'Institut Pasteur de Tunis*, 16, III, 1927, p. 233.

(²) Mémoire encore inédit.

Chez le cheval, la toxine purifiée a perdu la plus grande partie de son activité. La dialyse, par elle seule, n'a pas rendu la toxine inactive. Le cheval a réagi aussi fortement à la toxine chauffée qu'à la toxine non chauffée.

Chez l'enfant, la toxine purifiée a perdu toute son activité. La dyalise seule ne l'a pas rendue inactive. L'enfant n'a pas réagi à la toxine chauffée.

La purification soustrait à la toxine des protéines actives pour le cheval. Elle soustrait, en plus, l'élément qui cause chez l'enfant la réaction de Dick.

La toxine de Dick est entraînée par les précipités phosphatiques ; mais, lorsqu'on a remis le précipité en suspension, on ne la retrouve pas. Ou bien la dialyse de 8 heures (faite après les précipitations), qui ne soustrait pas la toxine diphtérique, soustrait la toxine de Dick, et il faudrait dans le cas de cette toxine une dialyse plus courte. Ou bien la toxine de Dick suit jusqu'au bout les protéines et ne s'en laisse pas séparer. Dans les deux hypothèses, elle ne possède pas les mêmes propriétés physico-chimiques que la toxine diphtérique.

On peut tirer de ces expériences deux conclusions :

1° La réaction n'est pas de la même nature chez le cheval et chez l'homme.

Des expériences nous ayant montré que le cheval immunisé réagit encore, il s'ensuit que la réaction de Dick proprement dite existe chez l'homme et n'existe pas chez le cheval.

2° La toxine scarlatineuse ne se comporte pas, à travers les opérations de la méthode de Abt, de la même manière que la toxine diphtérique.

Il y a lieu de pousser plus loin l'étude parallèle des deux toxines. Les faits acquis suffisent à établir qu'on ne peut se contenter de concevoir sommairement, sans plus ample informé, la toxine streptococcique-scarlatineuse comme l'analogue de la toxine diphtérique, ni l'étiologie de la scarlatine comme le décalque exact de l'étiologie de la diphtérie.

La séance est levée à 15h 15m.

A. Lx.